

Numerik

Ingenieurinformatik Teil 2, Sommersemester 2026

David Straub

Gliederung

1. Einführung in Matlab
2. Arbeiten mit Arrays
3. Funktionen und Kontrollstrukturen
4. Analysis
5. **Lineare Algebra**
6. Differentialgleichungen
7. Einführung in Simulink

Fahrplan

Letzte Einheit: Matrizen und lineare Gleichungssysteme → Matrixoperationen, Determinante, Inverse → Linksddivision \ für LGS → Überbestimmte Systeme und Least-Squares

Heute: Eigenwertprobleme → Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen → Geometrische Interpretation → Anwendung: Gekoppelte Schwingungen

Motivation

Was ist ein Eigenwertproblem?

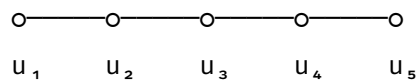
Definition: Ein Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ heißt **Eigenvektor** der Matrix A , wenn es eine Zahl λ gibt mit:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Die Zahl λ heißt **Eigenwert** zum Eigenvektor $\mathbf{x}$.

Beispiel: Gitarrensaite

Modell: n Massen m , durch Fadenspannung T verbunden, Abstand h



Jede Masse wird von ihren **Nachbarn** gezogen:

$$F_i = \frac{T}{h}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$$

$F = ma$, dann Ansatz $u_i(t) = v_i \cos(\omega t)$ einsetzen — für alle n Massen gleichzeitig:

$$K\mathbf{v} = \omega^2 m \mathbf{v}$$

Gitarrensaite: Die Steifigkeitsmatrix K

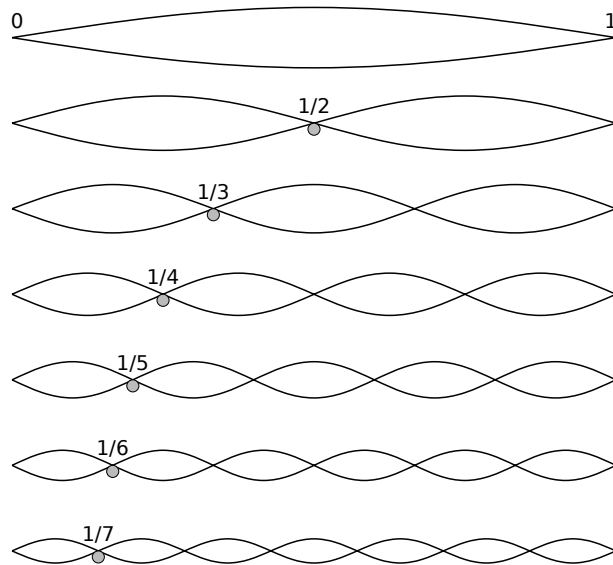
K enkodiert die **Kopplung** zwischen Nachbarn ($n = 5$):

$$K = \frac{T}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

m ist eine Zahl — alle Massen gleich.

Die **Eigenwerte** ω^2 sind die erlaubten Schwingungsfrequenzen,
die **Eigenvektoren** $\mathbf{v}$ die zugehörigen Schwingungsformen.

Gitarrensaite: Grundton und 1. Oberton



Grundton ω_1 : alle Massen gleichphasig

$$\mathbf{v}_1 \approx (0.50, 0.87, 1.00, 0.87, 0.50)^T$$

1. Oberton $\omega_2 \approx 2\omega_1 \rightarrow$ Oktave

$$\mathbf{v}_2 \approx (0.87, 0.87, 0, -0.87, -0.87)^T$$

Knotenpunkt in der Mitte: zweite Hälfte schwingt **gegenphasig**.

Beispiel: Flugzeugflügel Turboprop

Problem: Das Triebwerk dreht sich. Wenn die Drehfrequenz eine Eigenfrequenz des Flügels trifft
→ Resonanz → Materialversagen.

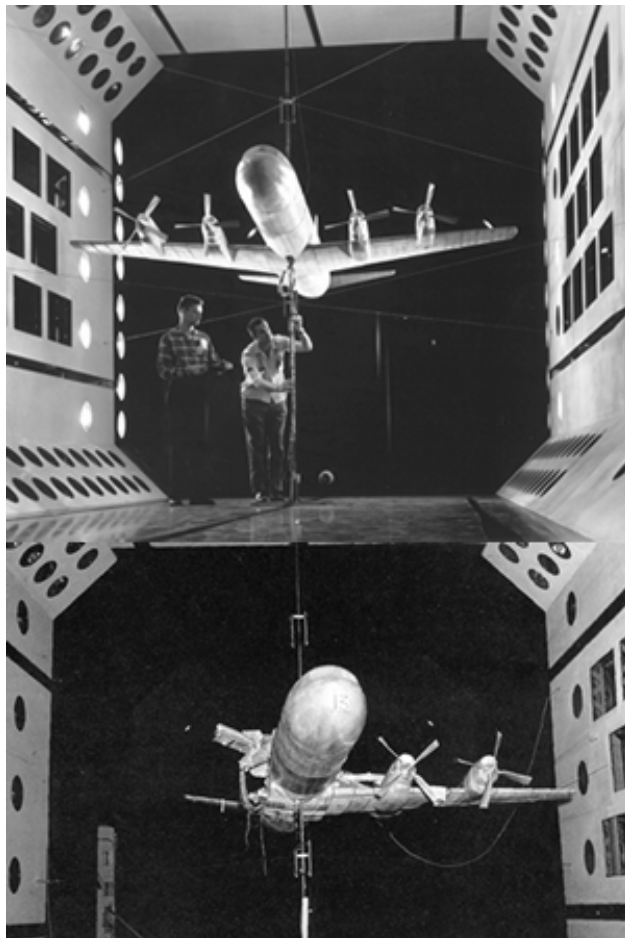
- Historisches Beispiel: Lockheed L-188 Electra, 1959: „Whirl Flutter“ führte zum strukturellen Versagen der Tragflächen.

Vereinfachtes Modell: Flügel + Triebwerk als 2-Massen-System:

$$K \mathbf{v} = \omega^2 M \mathbf{v}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{\text{Flügel}} & 0 \\ 0 & m_{\text{Triebwerk}} \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren $\mathbf{v}$: Schwingungsform — z.B. Flügel hebt sich, Triebwerk senkt sich.

Ziel der Konstruktion: Struktur so auslegen, dass die Eigenfrequenzen außerhalb des Betriebsdrehzahlbereichs liegen!



Eigenwertproblem

Was ist ein Eigenwertproblem?

Definition: Ein Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ heißt **Eigenvektor** der Matrix A , wenn es eine Zahl λ gibt mit:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Die Zahl λ heißt **Eigenwert** zum Eigenvektor $\mathbf{x}$.

A muss **quadratisch** sein: $A\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}$ müssen denselben Typ haben (gleiche Dimension), damit $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ überhaupt Sinn ergibt.

Geometrische Interpretation

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

- Öffnen Sie GeoGebra
- Finden Sie Vektoren, bei denen die Transformation M die Richtung des Vektors $v = \overrightarrow{OP}$ nicht ändert
- Interpretieren Sie und diskutieren Sie den Zusammenhang mit Eigenvektoren und Eigenwerten

Eigenschaften

Für symmetrische Matrizen ($A = A^T$): - Alle Eigenwerte sind **reell** - Es gibt n linear unabhängige Eigenvektoren

Für nicht-symmetrische Matrizen: - Eigenwerte können **komplex** sein - Nicht immer n linear unabhängige Eigenvektoren

Determinante:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Eigenwerte in Matlab

Die Funktion eig

```
A = [1 2;  
     3 4];  
  
lambda = eig(A)           % Eigenwerte als Vektor
```

Mit Eigenvektoren:

```
[V, D] = eig(A)
```

- V: Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren sind
- D: Diagonalmatrix mit den Eigenwerten

Beziehung: $AV = VD$

```
A = [4 -5 1;  
     2 -3 1;  
     1 -2 2];  
  
[V, D] = eig(A)
```

Es gilt:

$$A \cdot V = V \cdot D$$

Komponentenweise (Zeile i , Eigenvektor k):

$$\sum_j A_{ij} V_{jk} = \lambda_k V_{ik}$$

Beispiel: 3×3 Matrix

```
A = [4 -5 1;
      2 -3 1;
      1 -2 2];

[V, D] = eig(A);

D      % Diagonalmatrix mit Eigenwerten
```

Ausgabe:

```
D =
   -0.6180         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    1.6180
```

Drei Eigenwerte: $\lambda_1 = -0.62$, $\lambda_2 = 2.00$, $\lambda_3 = 1.62$ **? Übung: Eigenwerte erkunden**

Gegeben ist die symmetrische Matrix:

```
A = [3 1; 1 3];
```

1. Berechnen Sie die Eigenwerte mit `eig(A)`
2. Berechnen Sie Eigenwerte **und** Eigenvektoren mit `[V, D] = eig(A)`
3. Überprüfen Sie: Gilt $A * V(:,1) = D(1,1) * V(:,1)$?
4. Was fällt an den Eigenwerten auf? (*Hinweis: A ist symmetrisch*)
5. Berechnen Sie $\det(A)$ – wie hängt das mit den Eigenwerten zusammen?

Eigenvektor zum 3. Eigenwert

```
V(:,3)      % 3. Spalte von V
```

Ausgabe:

```
0.3361
0.3361
```

0.8798

Probe:

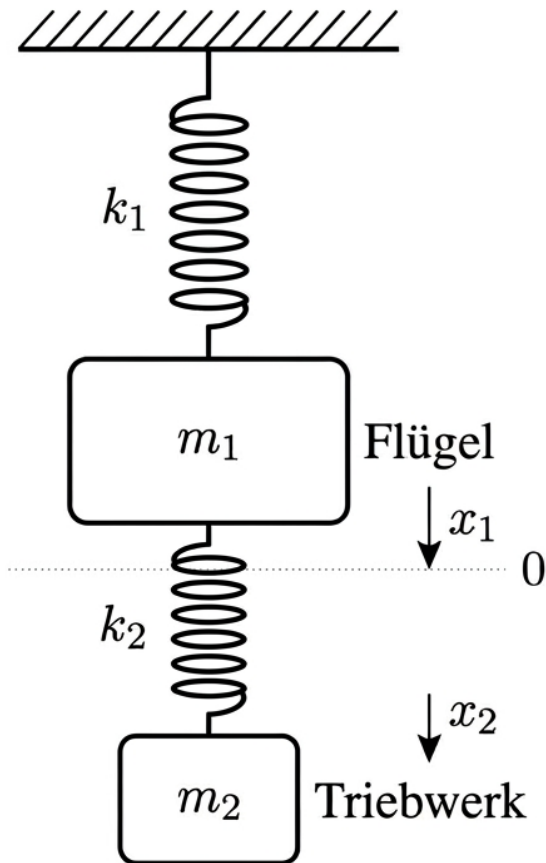
```
A * V(:,3)           % [0.544; 0.544; 1.424]
D(3,3) * V(:,3)      % [0.544; 0.544; 1.424] ⌈?
```

Anwendung: Gekoppelte Schwingungen

2-Massen-Feder-System

Image Missing

Zwei Massen m_1 , m_2 sind durch Federn verbunden.



Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1)$$

Gesucht: Wie schwingen die Massen?

Dasselbe Modell wie der Flugzeugflügel von vorhin — jetzt rechnen wir es vollständig durch.

Umformung zum Eigenwertproblem

Ansatz: $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$, $x_2(t) = A_2 \cos(\omega t)$

Führt auf:

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

Das ist ein **Eigenwertproblem**!

$$K \mathbf{A} = \omega^2 M \mathbf{A}$$

Parameter festlegen

```
m1 = 1;    % Masse 1 [kg]
m2 = 1;    % Masse 2 [kg]
c1 = 1;    % Federkonstante 1 [N/m]
c2 = 1;    % Federkonstante 2 [N/m]

K = [c1+c2, -c2;
     -c2,    c2];

M = [m1, 0;
     0, m2];
```

Verallgemeinertes Eigenwertproblem

Problem: $K \mathbf{A} = \omega^2 M \mathbf{A}$

Das ist ein **verallgemeinertes Eigenwertproblem**:

$$A \mathbf{x} = \lambda B \mathbf{x}$$

Matlab:

```
[V, D] = eig(K, M)
```

V enthält die **Eigenvektoren** (Schwingungsformen) D enthält die **Eigenwerte** ω^2

Eigenfrequenzen berechnen

```
[V, D] = eig(K, M);

omega_squared = diag(D)      % [0.382; 2.618]
omega = sqrt(omega_squared)  % [0.618; 1.618]
f = omega / (2*pi)           % Frequenzen in Hz
```

Zwei Eigenfrequenzen: - $\omega_1 = 0.618 \text{ rad/s}$ - $\omega_2 = 1.618 \text{ rad/s}$

Eigenschwingungen (Eigenvektoren)

V

Ausgabe:

```
-0.5257  -0.8507
-0.8507   0.5257
```

Erste Eigenschwingung: Beide Massen schwingen **in Phase** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.53 \\ -0.85 \end{bmatrix}$ (gleiches Vorzeichen)

Zweite Eigenschwingung: Beide Massen schwingen **gegenphasig** $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.85 \\ 0.53 \end{bmatrix}$ (entgegengesetztes Vorzeichen)

Visualisierung der Eigenschwingungen

```
t = linspace(0, 20, 500);

tiledlayout(1, 2)
```

```

nexttile
plot(t, V(1,1)*cos(omega(1)*t), t, V(2,1)*cos(omega(1)*t))
title(sprintf('Mode 1 (\\omega_1 = %.2f rad/s)', omega(1)))
xlabel('t [s]'); legend('Masse 1', 'Masse 2')

nexttile
plot(t, V(1,2)*cos(omega(2)*t), t, V(2,2)*cos(omega(2)*t))
title(sprintf('Mode 2 (\\omega_2 = %.2f rad/s)', omega(2)))
xlabel('t [s]'); legend('Masse 1', 'Masse 2')

```

Spezialfälle: Reine Eigenschwingungen

Anfangsbedingung = Eigenvektor $\rightarrow$ nur **eine** Mode wird angeregt:

```

x0 = V(:,1); %  $\rightarrow$  nur  $\omega_1$ , beide Massen in Phase
x0 = V(:,2); %  $\rightarrow$  nur  $\omega_2$ , Massen gegenphasig

```

Beliebige Anfangsbedingung $\rightarrow$ **Überlagerung** beider Moden.

Übung: Federsystem erkunden

Ändern Sie die Parameter und beobachten Sie das Verhalten:

```

m1 = 2; m2 = 1; % Unterschiedliche Massen
c1 = 2; c2 = 3; % Unterschiedliche Federn

```

1. Wie ändern sich die Eigenfrequenzen ω_1, ω_2 ?
2. Wie sehen die neuen Eigenschwingungsformen aus?
3. Welche Anfangsbedingung x_0 regt **nur** die erste Eigenschwingung an?
4. **Bonusaufgabe:** Was passiert wenn $c_1 = 0$? (Kein Anker für Masse 1)

Zusammenfassung

Eigenwertprobleme in Matlab

Gewöhnliches Eigenwertproblem:

```
lambda = eig(A)           % Nur Eigenwerte  
[V, D] = eig(A)           % Eigenvektoren und -werte
```

Verallgemeinertes Eigenwertproblem:

```
[V, D] = eig(A, B)
```

Wichtigste Erkenntnisse

- Eigenvektoren sind **besondere Richtungen**, die nur gestreckt/gestaucht werden
- **Physikalische Bedeutung:** Eigenschwingungen, Hauptachsen, stabile Richtungen
- Eigenwerte einer Matrix: $\det(A) = \prod \lambda_i$
- Für symmetrische Matrizen: Eigenwerte immer reell
- **Verallgemeinertes EWP:** $Kx = \omega^2 Mx \rightarrow \text{eig}(K, M)$ (nicht $\text{eig}(\text{inv}(M)*K)$!)
- **Anwendungen:** Schwingungsanalyse, Stabilitätsuntersuchungen, FEM, Regelungstechnik,
...